

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Научно-исследовательский вычислительный центр

О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ, СОБСТВЕННЫХ
ЗНАЧЕНИЙ И ВЕКТОРОВ И ОБРАЩЕНИЕ
СИММЕТРИЧНЫХ ЯКОБИЕВЫХ МАТРИЦ С
ОДИНАКОВЫМИ ДИАГОНАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Учебное пособие

Москва, 2016

О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин

Вычисление определителей, собственных значений и векторов
и обращение симметричных якобиевых матриц с одинаковыми
диагональными элементами

(Учебное пособие)

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	3
2. Вычисление определителей	4
3. Вычисление обратной матрицы	6
4. Вычисление собственных значений	10
5. Вычисление собственных векторов	13
6. Примеры	15
Литература	19
Приложение 1. Тексты тестовых программ на языке Фортран	21
Приложение 2. Тексты тестовых программ на языке Си	27

1. Введение

В настоящем учебном пособии рассматривается общий подход к выводу расчетных формул для вычисления определителей, собственных значений и векторов, а также для обращения симметричных якобиевых матриц с одинаковыми диагональными элементами. Для иллюстрации рассматривается один класс таких матриц, часто встречаемых в практических приложениях.

При проведении занятий по вычислительному практикуму весьма важным является всестороннее тестирование студенческих программ. Таким образом достигается закрепление не только знаний теоретического курса по методам вычислений, но и приемов грамотного программирования. В этом отношении особенный интерес представляет практикум по линейной алгебре [1].

Ниже предлагается набор тестов, составленных для симметричных якобиевых матриц [2] порядка n с одинаковыми диагональными элементами, имеющих вид ($c \neq 0$)

$$A_n = \begin{pmatrix} d & c & & & & \\ c & d & c & & & \\ & c & d & c & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & d & c \\ & & & & c & d \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Вычисление рассматриваемых здесь характеристик матрицы (1) выполняется с использованием стандартных приемов решения разностных уравнений. Это важно в методическом отношении, поскольку подчеркивается глубокая взаимосвязь численных методов линейной алгебры и разностных методов решения задач математической физики [3]. Результаты, полученные в общем виде, иллюстрируются примером одного типа матриц, с которыми часто приходится иметь дело на практике.

Излагаемый здесь материал может служить также приложением к задачникам по численным методам [4, 5] и может использоваться как студентами для самостоятельного изучения численных методов, так и преподавателями в процессе подбора задач для семинарских занятий.

Предлагаемые в пособии тесты были в разные годы применены для сертификации алгебраических программ Библиотеки численного анализа НИВЦ МГУ [6]. Приведенные здесь расчетные формулы реализованы в виде программ на языках Фортран и Си. Эти программы помещены в тематическом сервере НИВЦ МГУ по численному анализу (http://www.srcc.msu.su/num_anal) и находятся в свободном доступе.

2. Вычисление определителей

Получим рекуррентное соотношение для определителя матрицы (1). Для этого разложим определитель по первой строке:

$$\det(A_n) = d \det(A_{n-1}) + (-1)^3 c \begin{vmatrix} c & c & & & \\ & d & c & & \\ & c & d & c & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c & d & c \\ & & & & c & d \end{vmatrix}.$$

Разложив последний определитель по первому столбцу, получим искомое рекуррентное соотношение:

$$\det(A_n) = d \det(A_{n-1}) - c^2 \det(A_{n-2}).$$

Положим $n = n+2$. Тогда для вычисления $\det(A_n)$ имеем разностное уравнение

$$\det(A_{n+2}) - d \det(A_{n+1}) + c^2 \det(A_n) = 0$$

с начальными условиями

$$\det(A_1) = d, \quad \det(A_2) = d^2 - c^2.$$

Характеристическое уравнение

$$q^2 - dq + c^2 = 0$$

имеет корни

$$q_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4c^2}}{2}.$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть $q_1 = q_2$, т.е. $|d| = 2|c|$. Тогда общее решение выписанного разностного уравнения имеет вид

$$\det(A_n) = a q_1^n + b n q_1^n = q_1^n (a + bn).$$

Из начальных условий найдем, что $a = b = 1$. Таким образом, для рассматриваемого случая имеем $q_1 = \frac{d}{2}$ и определитель матрицы (1) вычисляется по формуле

$$\det(A_n) = \left(\frac{d}{2}\right)^n (1 + n). \tag{2}$$

Отсюда видно, что в соответствии с критерием Сильвестра матрица (1) при $|d| = 2|c|$ положительно определена, если $d > 0$, и отрицательно определена, если $d < 0$.

2) Пусть теперь $q_1 \neq q_2$, т.е. $|d| \neq 2|c|$. Тогда общее решение разностного уравнения имеет вид

$$\det(A_n) = \alpha q_1^n + \beta q_2^n.$$

Для определения α и β выпишем из начальных условий линейную систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= d = \alpha q_1 + \beta q_2, \\ \det(A_2) &= d^2 - c^2 = \alpha q_1^2 + \beta q_2^2, \end{aligned}$$

решением которой являются

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d^2 - c^2 - dq_2}{q_1^2 - q_1q_2} = \frac{q_1^2}{q_1^2 - q_1q_2} = \frac{q_1}{q_1 - q_2}, \\ \beta &= \frac{d^2 - c^2 - dq_1}{q_2^2 - q_1q_2} = \frac{q_2^2}{q_2^2 - q_1q_2} = \frac{q_2}{q_2 - q_1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\det(A_n) = \frac{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}}{q_1 - q_2}. \quad (3)$$

Поскольку $q_1 - q_2 = \sqrt{d^2 - 4c^2}$, то

$$\det(A_n) = \frac{(d + \sqrt{d^2 - 4c^2})^{n+1} - (d - \sqrt{d^2 - 4c^2})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{d^2 - 4c^2}}.$$

Если $d^2 > 4c^2$, то из последней записи следует, что по критерию Сильвестра матрица (1) положительно определена, если $d > 0$, и отрицательно определена, если $d < 0$.

Если $d = 0$, то

$$\det(A_n) = \frac{(\sqrt{-4c^2})^{n+1} - (-\sqrt{d^2 - 4c^2})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{-4c^2}} = i^n |c|^n \left(\frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} \right).$$

Следовательно, при $d = 0$ матрица (1) вырождена для нечетных n и не вырождена для четных n .

Если $d^2 < 4c^2$, то выражение (3) можно записать по-другому. Преобразуем корни характеристического уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} q_{1,2} &= \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4c^2}}{2} = \frac{d \pm 2|c|\sqrt{(d/2c)^2 - 1}}{2} = \frac{d}{2} \pm |c|\sqrt{\left(\frac{d}{2c}\right)^2 - 1} = \\ &= c \frac{d}{2c} \pm i|c|\sqrt{1 - \left(\frac{d}{2c}\right)^2}. \end{aligned}$$

Поскольку $|d/2c| < 1$, то обозначим $\cos \varphi = \frac{d}{2c}$; тем самым, эти корни могут быть записаны в нормальной тригонометрической форме в виде

$$\begin{aligned} q_{1,2} &= c(\cos \varphi \pm i \sin \varphi), \quad \text{если } c > 0, \\ q_{1,2} &= c(\cos \varphi \mp i \sin \varphi), \quad \text{если } c < 0. \end{aligned}$$

С точностью до обозначения корней эти две записи совпадают. Выберем для определенности запись, соответствующую случаю $c > 0$. Тогда выражение (3) примет вид

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= \frac{c^{n+1}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{n+1} - c^{n+1}(\cos \varphi - i \sin \varphi)^{n+1}}{2ci \sin \varphi} = \\ &= \frac{2c^{n+1}i \sin(n+1)\varphi}{2ci \sin \varphi} = \frac{c^n \sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi} = \\ &= c^n \frac{\sin((n+1) \arccos(d/(2c)))}{\sin(\arccos(d/(2c)))} = c^n U_n(d/(2c)), \end{aligned}$$

где $U_n(d/(2c))$ — многочлен Чебышева второго рода.

3. Вычисление обратной матрицы

Вычисление обратной матрицы эквивалентно решению матричного уравнения

$$A_n X = E,$$

где E — единичная матрица порядка n . Подлежащие определению столбцы

$$\mathbf{x}^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}\right)^T, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

обратной матрицы X удовлетворяют разностным уравнениям ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$c x_{k-1}^{(j)} + d x_k^{(j)} + c x_{k+1}^{(j)} = \delta_k^j = \begin{cases} 0 & \text{при } k < j, \\ 1 & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{при } k > j \end{cases}$$

с краевыми условиями $x_0^{(j)} = 0$ и $x_{n+1}^{(j)} = 0$. Характеристическое уравнение

$$c q^2 + d q + c = 0$$

выписанной разностной задачи имеет корни

$$q_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4c^2}}{2c}.$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть $q_1 = q_2$, т.е. $|d| = 2|c|$. Тогда j -й столбец обратной матрицы запишется в виде

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= C'_1 q_1^k + C'_2 k q_1^k = (C'_1 + C'_2 k) q_1^k, & k \leq j, \\ x_k^{(j)} &= C''_1 q_1^k + C''_2 k q_1^k = (C''_1 + C''_2 k) q_1^k, & k \geq j, \end{aligned}$$

где C'_1, C'_2, C''_1, C''_2 — константы, подлежащие определению. Из краевых условий следует, что $C'_1 = 0$ и $C''_1 = -(n+1)C''_2$; поэтому выражения для элементов j -го столбца примут вид

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= k q_1^k C'_2, & k \leq j, \\ x_k^{(j)} &= (k - n - 1) q_1^k C''_2, & k \geq j. \end{aligned}$$

При $k = j$ оба выражения должны совпасть, т.е. должно выполняться следующее равенство: $j q_1^j C'_2 = (j - n - 1) q_1^j C''_2$. Отсюда получим первое соотношение, связывающее константы C'_2 и C''_2 :

$$C'_2 = \frac{j - n - 1}{j} C''_2.$$

Теперь подставим эти выражения в среднее уравнение

$$c x_{j-1}^{(j)} + d x_j^{(j)} + c x_{j+1}^{(j)} = 1$$

и получим второе соотношение, связывающее константы C'_2 и C''_2 :

$$c(j-1)q_1^{j-1}C'_2 + d j q_1^j C'_2 + c(j-n)q_1^{j+1}C''_2 = 1.$$

Из этих двух соотношений следует, что

$$C'_2 = \frac{j - n - 1}{c q_1^{j-1} (j q_1^2 - j + n + 1)}, \quad C''_2 = \frac{j}{c q_1^{j-1} (j q_1^2 - j + n + 1)}.$$

Таким образом, в рассмотренном случае столбцы обратной матрицы задаются следующими выражениями ($j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= \frac{(j-n-1)k q_1^{k-j+1}}{c(j q_1^2 - j + n + 1)}, & k \leq j, \\ x_k^{(j)} &= \frac{(k-n-1)j q_1^{k-j+1}}{c(j q_1^2 - j + n + 1)}, & k \geq j. \end{aligned} \quad (4)$$

2) Пусть $q_1 \neq q_2$, т.е. $|d| \neq 2|c|$. Тогда j -й столбец обратной матрицы запишется в виде

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= C'_1 q_1^k + C'_2 q_2^k, & k \leq j, \\ x_k^{(j)} &= C''_1 q_1^k + C''_2 q_2^k, & k \geq j, \end{aligned}$$

где C'_1, C'_2, C''_1, C''_2 — константы, подлежащие определению. Потребуем, чтобы эти выражения совпали при $k = j$:

$$C'_1 q_1^j + C'_2 q_2^j = C''_1 q_1^j + C''_2 q_2^j.$$

Отсюда получим первое соотношение, связывающее искомые константы:

$$(C'_1 - C''_1) q_1^j = (C''_2 - C'_2) q_2^j.$$

Подставив эти выражения в среднее уравнение

$$c x_{j-1}^{(j)} + d x_j^{(j)} + c x_{j+1}^{(j)} = 1,$$

получим второе соотношение, связывающее искомые константы:

$$c(C''_1 - C'_1) q_1^{j+1} + c(C''_2 - C'_2) q_2^{j+1} = 1.$$

Из этих соотношений получим

$$C''_1 = C'_1 + \frac{1}{c q_1^j (q_1 - q_2)}, \quad C''_2 = C'_2 - \frac{1}{c q_2^j (q_1 - q_2)},$$

откуда

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= C'_1 q_1^k + C'_2 q_2^k, & k \leq j, \\ x_k^{(j)} &= \left(C'_1 + \frac{1}{c q_1^j (q_1 - q_2)} \right) q_1^k + \left(C'_2 - \frac{1}{c q_2^j (q_1 - q_2)} \right) q_2^k, & k \geq j. \end{aligned}$$

Из первого краевого условия следует, что $C'_1 + C'_2 = 0$, т.е. $C'_2 = -C'_1$. Из второго краевого условия получим второе соотношение, связывающее константы C'_1 и C'_2 :

$$\left(C'_1 + \frac{1}{c q_1^j (q_1 - q_2)} \right) q_1^{n+1} + \left(C'_2 - \frac{1}{c q_2^j (q_1 - q_2)} \right) q_2^{n+1} = 0.$$

Из этих соотношений следует, что

$$C'_1 = -\frac{q_1^{n+1-j} - q_2^{n+1-j}}{c (q_1 - q_2) (q_1^{n+1} - q_2^{n+1})}.$$

Таким образом, в случае разных корней характеристического уравнения столбцы обратной матрицы задаются следующими выражениями ($j = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= C'_1 (q_1^k - q_2^k), & k \leq j, \\ x_k^{(j)} &= C'_1 (q_1^k - q_2^k) + \frac{q_1^{k-j} - q_2^{k-j}}{c (q_1 - q_2)}, & k \geq j. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим отдельно случай, когда $d^2 < 4c^2$, т.е. корни характеристического уравнения комплексные и имеют вид

$$q_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi, \quad \cos \varphi = -\frac{d}{2c}.$$

После несложных преобразований с использованием формулы Муавра получим из (5), что в этом случае столбцы обратной матрицы задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= -\frac{\sin(n+1-j)\varphi \sin k\varphi}{c \sin \varphi \sin(n+1)\varphi}, & k \leq j, \\ x_k^{(j)} &= -\frac{\sin(n+1-j)\varphi \sin k\varphi}{c \sin \varphi \sin(n+1)\varphi} + \frac{\sin(k-j)\varphi}{\sin \varphi}, & k \geq j, \end{aligned}$$

где $j = 1, 2, \dots, n$ и $k = 1, 2, \dots, n$.

Если $d = 0$, то $q_{1,2} = \pm i$. Тогда из последних выражений следует, что матрица (1) вырождена при нечетных n .

4. Вычисление собственных значений.

Вычислим собственные значения λ матрицы (1). Аналогично п. 1 заключаем, что угловые миноры $A_k(\lambda)$ матрицы $A_n - \lambda E$ связаны рекуррентным соотношением (здесь E — единичная матрица порядка n)

$$\begin{aligned} A_k(\lambda) &= (d - \lambda) A_{k-1}(\lambda) - c^2 A_{k-2}(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ A_{-1}(\lambda) &= 0, \quad A_0(\lambda) = 1, \end{aligned}$$

из которого получим разностное уравнение

$$A_k(\lambda) - (d - \lambda) A_{k-1}(\lambda) + c^2 A_{k-2}(\lambda) = 0$$

с начальными условиями

$$A_1(\lambda) = d - \lambda, \quad A_2(\lambda) = (d - \lambda)^2 - c^2.$$

Корни характеристического уравнения

$$q^2 - (d - \lambda)q + c^2 = 0$$

запишем в виде

$$q_{1,2} = c \left(\frac{d - \lambda}{2c} \right) \pm i|c| \sqrt{1 - \left(\frac{d - \lambda}{2c} \right)^2}.$$

Из теоремы о кругах Гершгорина следует, что $|d - \lambda| \leq 2|c|$, т.е. $\left| \frac{d - \lambda}{2c} \right| \leq 1$.

Поэтому мы можем обозначить $\frac{d - \lambda}{2c} = \cos \varphi$ и, как это было сделано в п. 1, представить корни $q_{1,2}$ в тригонометрической форме

$$q_{1,2} = c(\cos \varphi \pm i \sin \varphi).$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_k(\lambda) &= \alpha c^k (\cos \varphi + i \sin \varphi)^k + \beta c^k (\cos \varphi - i \sin \varphi)^k = \\ &= (\alpha + \beta) c^k \cos k\varphi + i(\alpha - \beta) c^k \sin k\varphi = \\ &= \alpha' c^k \cos k\varphi + \beta' c^k \sin k\varphi. \end{aligned}$$

Начальные условия представим в виде

$$\begin{aligned} A_1(\lambda) &= d - \lambda = \frac{d - \lambda}{2c} 2c = 2c \cos \varphi, \\ A_2(\lambda) &= (d - \lambda)^2 - c^2 = c^2 \left(4 \left(\frac{d - \lambda}{2c} \right)^2 - 1 \right) = c^2 (4 \cos^2 \varphi - 1). \end{aligned}$$

Представим теперь выражение (6) для спектра матрицы (1) в форме

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= d - 2c \cos \frac{\pi}{n+1} k = 2c \left(\frac{d}{2c} - \cos \frac{\pi}{n+1} k \right) = \\
&= 2c \left(\frac{d}{2c} - 1 + 1 - \cos \frac{\pi}{n+1} k \right) = \\
&= 2c \left(\frac{d}{2c} - 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} k \right) = d - 2c + 4c \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} k
\end{aligned} \tag{7}$$

и покажем, что собственные значения этой матрицы могут быть выражены также следующей формулой:

$$\lambda_k = d + 2c \cos \frac{\pi}{n+1} k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{8}$$

Действительно, аналогичными выкладками формула (8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= d - 2c + 4c \cos^2 \frac{\pi}{2(n+1)} k = d - 2c + 4c \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(n+1)} k \right) = \\
&= d - 2c + 4c \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} (n+1-k).
\end{aligned}$$

Легко заметить, что в последнем равенстве и в (7) аргументы у синуса пробегают одни и те же точки единичной окружности, но в противоположных направлениях. Следовательно, спектр матрицы (1) может быть выражен как формулой (6), так и формулой (8). К такому же заключению можно прийти, если преобразовать представление (7) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= d - 2c + 4c \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} k = \\
&= d - 2c + 4c \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(n+1)} k \right) = \\
&= d + 2c - 4c \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} (n+1-k).
\end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, из полученных здесь формул следует, что

- все собственные значения матрицы (1) принадлежат интервалу $(d-2c, d+2c)$ и сгущаются к его границам;
- матрица (1) положительно определена, если $d > 0$ и $d \geq 2|c|$;
- спектры симметричных якобиевых матриц с побочными диагоналями, равными c и $-c$, совпадают при одинаковых значениях d .

Для того чтобы расположить собственные значения матрицы (1) слева направо в интервале $(d - 2c, d + 2c)$, т.е. в порядке возрастания, в формуле (6) значения k следует менять от 1 до n при $c > 0$ и от n до 1 при $c < 0$.

5. Вычисление собственных векторов.

Для того чтобы вычислить собственные векторы матрицы (1), необходимо для каждого ее собственного значения λ_k найти ненулевое решение однородной линейной системы $(A_n - \lambda_k E) \mathbf{x}^{(k)} = 0$. Если для λ_k выбрать представление (6), то эта система эквивалентна системе линейных уравнений

$$c x_{j-1}^{(k)} + 2c \cos \frac{\pi k}{n+1} x_j^{(k)} + c x_{j+1}^{(k)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где $x_0^{(k)} = 0$ и $x_{n+1}^{(k)} = 0$. После сокращения на c , будем ее рассматривать как разностную краевую задачу. Легко проверить, что $q_{1,2} = -\left(\cos \frac{\pi k}{n+1} \pm i \sin \frac{\pi k}{n+1}\right)$ — корни характеристического уравнения. Тогда общее решение этой разностной задачи представляется в виде

$$x_j^{(k)} = (-1)^j C_1 \cos \frac{j\pi k}{n+1} + (-1)^j C_2 \sin \frac{j\pi k}{n+1}.$$

Из первого краевого условия следует, что $C_1 = 0$. Отсюда заключаем, что

$$x_j^{(k)} = (-1)^j C_2 \sin \frac{j\pi k}{n+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

являются компонентами собственного вектора, соответствующего ранее вычисленному собственному значению λ_k (заметим, что второе краевое условие удовлетворяется при любом C_2). В качестве одного из возможных способов нормировки собственных векторов можно взять в (10) условие $C_2 = 1$.

Пронормируем теперь полученные собственные векторы так, чтобы первая компонента каждого вектора равнялась 1. Тогда из (10) следует, что для $k = 1, 2, \dots, n$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= 1, \\ x_j^{(k)} &= (-1)^{j+1} \frac{\sin \frac{j\pi k}{n+1}}{\sin \frac{\pi k}{n+1}}, \quad j = 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что формула (11) определяет собственные векторы $\mathbf{x}^{(k)}$, упорядоченные таким образом, что они соответствуют собственным значениям λ_k , расположенным в порядке возрастания.

И наконец, получим из (10) систему нормированных собственных векторов (евклидова норма каждого такого вектора равна 1). Это означает, что надо подобрать константу C_2 из условия

$$C_2^2 \left(\sin^2 \frac{\pi k}{n+1} + \sin^2 \frac{2\pi k}{n+1} + \dots + \sin^2 \frac{n\pi k}{n+1} \right) = C_2^2 \sum_{j=1}^n \sin^2 \frac{j\pi k}{n+1} = 1.$$

Для этого выразим каждое слагаемое через косинус двойного аргумента

$$\sin^2 \frac{j\pi k}{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2j\pi k}{n+1} \right)$$

и перепишем данное условие нормировки в виде

$$C_2^2 \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \cos \frac{2j\pi k}{n+1} \right) = 1.$$

Покажем, что последняя сумма равна -1 .

Действительно, положив для упрощения выкладок $\alpha = \frac{2\pi k}{n+1}$, представим эту сумму в форме

$$\sum_{j=1}^n \cos \frac{2j\pi k}{n+1} = \sum_{j=1}^n \cos \left(\frac{2\pi k}{n+1} + (j-1) \frac{2\pi k}{n+1} \right) = \sum_{j=1}^n \cos (\alpha + (j-1) \alpha).$$

Применяя затем последовательно формулу

$$2 \sin b \cos a = \sin (a+b) - \sin (a-b),$$

получим совокупность равенств

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha = \sin \left(\alpha + \frac{1}{2} \alpha \right) - \sin \left(\alpha - \frac{1}{2} \alpha \right),$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos (\alpha + \alpha) = \sin \left(\alpha + \frac{3}{2} \alpha \right) - \sin \left(\alpha + \frac{1}{2} \alpha \right),$$

.....

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos (\alpha + (n-2) \alpha) = \sin \left(\alpha + \frac{2n-3}{2} \alpha \right) - \sin \left(\alpha + \frac{2n-5}{2} \alpha \right),$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos (\alpha + (n-1) \alpha) = \sin \left(\alpha + \frac{2n-1}{2} \alpha \right) - \sin \left(\alpha + \frac{2n-3}{2} \alpha \right).$$

Сложив почленно эти равенства, получим

$$\begin{aligned}
 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^n \cos(\alpha + (j-1)\alpha) &= \sin\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}\alpha\right) - \sin\left(\alpha - \frac{1}{2}\alpha\right) = \\
 &= \sin\left((n+1)\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \\
 &= \sin\left(2\pi k - \frac{\pi k}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) = -2 \sin \frac{\alpha}{2},
 \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{j=1}^n \cos \frac{2j\pi k}{n+1} = -1.$$

Следовательно, условие нормировки примет вид

$$C_2^2 \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \cos \frac{2j\pi k}{n+1} \right) = C_2^2 \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right) = C_2^2 \frac{n+1}{2} = 1,$$

поэтому для всех $k = 1, 2, \dots, n$ (т.е. для любого собственного вектора) имеем

$$C_2 = \sqrt{\frac{2}{n+1}}.$$

Таким образом, систему нормированных собственных векторов матрицы (1) образуют векторы

$$x_j^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{j\pi k}{n+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Заметим, что эти векторы являются столбцами ортогональной матрицы. Следовательно, матрица (1) хорошо обусловлена по отношению к проблеме собственных значений. Это подтверждает известный факт, что всякая симметричная матрица обладает таким свойством.

6. Примеры. В качестве примеров возьмем матрицы

$$\begin{aligned}
 A_n^{(1)} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, & A_n^{(2)} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \\
 A_n^{(3)} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, & A_n^{(4)} &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & & \\ -1 & -2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

и вычислим их характеристики, рассмотренные выше для матриц вида (1).

1) Для вычисления определителей используем формулу (2):

$$\begin{aligned}\det \left(A_n^{(1)} \right) &= \det \left(A_n^{(2)} \right) = 1 + n, \\ \det \left(A_n^{(3)} \right) &= \det \left(A_n^{(4)} \right) = (-1)^n (1 + n).\end{aligned}$$

Отсюда видно, что матрицы $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$ и $A_n^{(3)}$, $A_n^{(4)}$ являются положительно и отрицательно определенными соответственно.

2) Перед вычислением обратных матриц заметим, что корни характеристических уравнений, соответствующих матрицам $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$, имеют вид

$$q_{1,2}^{(1)} = 1 \quad \text{и} \quad q_{1,2}^{(2)} = -1.$$

Тогда из формулы (4) следует, что столбцы обратных матриц $A_n^{(1)-1}$ и $A_n^{(2)-1}$ определяются соответственно выражениями ($j = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned}x_k^{(j)} &= \frac{(n+1-j)k}{n+1}, & x_k^{(j)} &= (-1)^{k-j+2} \frac{(n+1-j)k}{n+1}, & k &\leq j, \\ x_k^{(j)} &= \frac{(n+1-k)j}{n+1}, & x_k^{(j)} &= (-1)^{k-j+2} \frac{(n+1-k)j}{n+1}, & k &\geq j.\end{aligned}$$

Приведем вид обратных матриц $A_n^{(1)-1}$ и $A_n^{(2)-1}$ для $n = 2, 3, 4, 5$.
Случай $n = 2$:

$$A_n^{(1)-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_n^{(2)-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 3$:

$$A_n^{(1)-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_n^{(2)-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 4$:

$$A_n^{(1)-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_n^{(2)-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 5$:

$$A_n^{(1)-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_n^{(2)-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -6 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & -6 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$A_n^{(3)-1} = -A_n^{(1)-1} \quad \text{и} \quad A_n^{(4)-1} = -A_n^{(2)-1}.$$

Получим теперь числа обусловленности указанных матриц по ∞ -норме. Для этого достаточно вычислить только $\text{cond}_\infty A_n^{(1)}$, поскольку числа обусловленности этих матриц совпадают.

Преобразуем сумму элементов j -го столбца матрицы $A_n^{(1)-1}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^j \frac{(n+1-j)k}{n+1} + \sum_{k=j+1}^n \frac{(n+1-k)j}{n+1} &= \\ &= \frac{1}{n+1} \left((n+1-j) \sum_{k=1}^j k + j \sum_{k=j+1}^n (n+1-k) \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \left((n+1-j) \frac{j(j+1)}{2} + j(n+1)(n-j) - \right. \\ &\quad \left. - j \frac{(n-j)(j+1+n)}{2} \right) = \frac{j(n+1-j)}{2}. \end{aligned}$$

Из этой записи заключаем, что максимум суммы достигается при $j = \frac{n}{2}$ или $j = \frac{n}{2} + 1$, если n четно, и при $j = \frac{n+1}{2}$, если n нечетно. Следовательно,

$$\|A_n^{(1)-1}\|_\infty = \begin{cases} \frac{n(n+2)}{8}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \frac{(n+1)^2}{8}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Поскольку $\|A_n^{(1)}\|_\infty = 4$, то получаем, что

$$\text{cond}_\infty A_n^{(1)} = \begin{cases} \frac{n(n+2)}{2}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \frac{(n+1)^2}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

3) Обратимся теперь к вычислению собственных значений. Из (7) и (9) следует, что спектры матриц $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ образуют совпадающие множества

$$\left\{ 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} (n+1-k), \quad k = n, n-1, \dots, 1 \right\},$$

$$\left\{ 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} k, \quad k = 1, 2, \dots, n \right\},$$

а спектры матриц $A_n^{(3)}$ и $A_n^{(4)}$ — также совпадающие множества

$$\left\{ -4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} (n+1-k), \quad k = n, n-1, \dots, 1 \right\},$$

$$\left\{ -4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} k, \quad k = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Отсюда видно, что числа обусловленности по спектральной норме этих матриц совпадают. Поэтому ограничимся случаем оценивания $\text{cond}_2 A_n^{(2)}$ как наиболее простым для анализа:

$$\text{cond}_2 A_n^{(2)} = \frac{\max_k \lambda_k}{\min_k \lambda_k} = \frac{4 \sin^2 \frac{\pi n}{2(n+1)}}{4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}} \sim \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2} \sim \frac{4}{\pi^2} n^2.$$

Выпишем спектры матриц $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ для некоторых значений n (спектры матриц $A_n^{(3)}$ и $A_n^{(4)}$ расположены симметрично им относительно нуля):

$$n = 2: \quad \{1, 3\}, \quad n = 3: \quad \left\{ 2 - \sqrt{2}, 2, 2 + \sqrt{2} \right\},$$

$$n = 4: \quad \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right\},$$

$$n = 5: \quad \left\{ 2 - \sqrt{3}, 1, 2, 3, 2 + \sqrt{3} \right\}.$$

4) Теперь выпишем собственные векторы матриц $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$, полученные по формуле (11) для $n = 2, 3, 4, 5$.

Случай $n = 2$:

$$\lambda_1 = 1: \quad \{1, -1\}, \quad \lambda_2 = 3: \quad \{1, 1\}.$$

Случай $n = 3$:

$$\begin{aligned}\lambda_1 = 2 - \sqrt{2} : \quad & \{1, -\sqrt{2}, 1\}, \quad \lambda_2 = 2 : \quad \{1, 0, -1\}, \\ \lambda_3 = 2 + \sqrt{2} : \quad & \{1, \sqrt{2}, 1\}.\end{aligned}$$

Случай $n = 4$:

$$\begin{aligned}\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} : \quad & \left\{1, -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, -1\right\}, \\ \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} : \quad & \left\{1, -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 1\right\}, \\ \lambda_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} : \quad & \left\{1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, -1\right\}, \\ \lambda_4 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} : \quad & \left\{1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 1\right\}.\end{aligned}$$

Случай $n = 5$:

$$\begin{aligned}\lambda_1 = 2 - \sqrt{3} : \quad & \{1, -\sqrt{3}, 2, -\sqrt{3}, 1\}, \quad \lambda_2 = 1 : \quad \{1, -1, 0, 1, -1\}, \\ \lambda_3 = 2 : \quad & \{1, 0, -1, 0, 1\}, \quad \lambda_4 = 3 : \quad \{1, 1, 0, -1, -1\}, \\ \lambda_5 = 2 + \sqrt{3} : \quad & \{1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, 1\}.\end{aligned}$$

Собственные векторы матриц $A_n^{(3)}$ и $A_n^{(4)}$, нормированные по формуле (11), совпадают с указанными с точностью до знака.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачев К.Ю.* Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. М.: Изд-во механико-математического ф-та Моск. ун-та, 1998.
2. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
3. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
4. *Арушанян И.О., Чижонков Е.В.* Материалы семинарских занятий по курсу "Методы вычислений" / под ред. Арушаняна О.Б. М.: Изд-во механико-математического ф-та Моск. ун-та, 1999.

5. *Икрамов Х.Д.* Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975.
6. *Арушанян О.Б.* Автоматизация конструирования библиотек программ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

Приложение 1. Тексты тестовых программ на языке Фортран

1. Программа вычисления определителей на Фортране

```
program sdet
double precision det
d = 4.
c = 1.
n = 2
call ads4d ( d, c, n, det )
write(*,33) d, c, n, det
33  FORMAT(2x,'d, c, n, det', 2X, 2E12.4, I4, E12.4)
stop
END

subroutine ads4d( d, c, n, det )
c
c Вычисление определителя
c симметричной якобиевой матрицы
c с одинаковыми диагональными элементами.
c
c Параметры программы:
c d - диагональный элемент
c c - внедиагональный элемент
c n - порядок матрицы
c det - значение определителя
c
integer n
double precision det, fi, p, r, r1, r2, r3, s1, s2
c совпадающие корни характеристического многочлена
r = d*d - 4*c*c
if ( r .ne. 0.) go to 1
det = ((d/2.)**n)*( 1. + n )
go to 3
c различные вещественные корни характеристического многочлена
1 if ( r .lt. 0.) go to 2
r1 = dsqrt( r )
r2 = ( d + r1 )
r3 = ( d - r1 )
s1 = r2**(n+1)
```

```

s2 = r3**(n+1)
p = 2.**(n+1)
det = ( s1 - s2 )/( p*r1)
go to 3
с мнимые корни характеристического многочлена
2 r = c**n
r1 = d/( 2 * c )
fi = dacos( r1 )
r2 = dsin( ( n + 1.)*fi)
r3 = dsin(fi)
det = r * r2/r3
3 return
end

```

2. Программа вычисления обратных матриц на Фортране

```

double precision ua( 3, 3 ), e( 3, 3 )
d = 2.
c = 1.
n = 3
call ais5d( d, c, n, ua, ierr )
write(*,33) d, c, n, ierr, ua
33 FORMAT(2x,'d, c, n, ierr, ua', 2X, 2E12.4, 2I4,/(3E12.4/))
do 2 i = 1, n
do 1 j = 1, n
if( i .eq. 1) e( i, j ) = d*ua(i,j) + c*ua(i+1,j)
if( i .eq. n) e( i, j ) = c*ua(i-1,j) + d*ua(i,j)
if( i .ne. 1 .and. i .ne. n)
1 e( i, j ) = c*ua(i-1,j) + d*ua(i,j) + c*ua(i+1,j)
1 continue
2 continue
write(*,34) d, c, n, e
34 FORMAT(2x,'d, c, n, e', 2X, 2E12.4, I4,/(3E12.4/))
stop
END

```

```

subroutine ais5d( d, c, n, ua, ierr )

```

с

с Вычисление обратной матрицы для

```

с симметричной якобиевой матрицы
с с одинаковыми диагональными элементами.
с
с Параметры программы:
с d - диагональный элемент
с c - внедиагональный элемент
с n - порядок матрицы
с ua(n,n) - двумерный массив элементов обратной матрицы
с ierr - признак, равный 1, если матрица вырождена
с      и 0 в противном случае
с
      integer  n, ierr, j, k
      real d, c, eps
      double precision ua(n,n), c1, c2, q1, q2
      double precision fi, r, r1, r2, xjk
      eps = 1.e-10
      ierr = 0
      r = d*d - 4*c*c
с совпадающие корни характеристического многочлена
      if ( abs(r). gt. eps) go to 3
      q1 = -d/(2.*c)
      do 2 j = 1, n
      do 1 k = 1, n
      r = q1**( k - j + 1 )
      r1 = c*( j*q1*q1 - j + n + 1 )
      xjk = r/r1
      if ( k .ge. j ) go to 13
      xjk = xjk * ( j - n - 1 )*k
      go to 14
13  xjk = xjk * ( k - n - 1 )*j
14  ua( j, k) = xjk
      1 continue
      2 continue
      return
с различные вещественные корни характеристического многочлена
      3  if ( d*d .lt. 4*c*c ) go to 6
      r1 = sqrt( d*d - 4.*c*c )
      q1 = ( -d + r1 )/(2.*c)
      q2 = ( -d - r1 )/(2.*c)

```

```

r1 = q1**( n+1 )
r2 = q2**( n+1 )
c1 = -1./( c*( q1 - q2 ) * ( r1 - r2 ))
do 5 j = 1, n
r1 = q1**( n+1-j )
r2 = q2**( n+1-j )
c2 = c1*( r1 - r2 )
do 4 k = 1, n
r1 = q1**k
r2 = q2**k
xjk = c2*( r1 - r2 )
ua( k, j ) = xjk
if ( k .le. j ) go to 4
r1 = q1**( k-j )
r2 = q2**( k-j )
xjk = xjk + ( r1 - r2 )/( c * ( q1 - q2 ) )
ua ( k , j ) = xjk
4 continue
5 continue
return
с мнимые корни характеристического многочлена
6 r1 = -d/( 2 * c )
fi = dacos( r1 )
do 8 j = 1, n
do 7 k = 1, n
r1 = c*dsin( fi )*dsin( (n + 1)*fi )
if( abs(r1).gt.eps ) go to 16
write(*,33)
33 FORMAT(2x,'матрица вырождена')
ierr = 1
return
16 xjk = -dsin(( n + 1 - j )*fi)*dsin( k*fi )/r1
if ( k .gt. j )
1 xjk = xjk + ( 1./c )*dsin( (k - j)*fi )/dsin( fi )
ua(k, j ) = xjk
7 continue
8 continue
9 return
end

```


3. Программа вычисления собственных значений на Фортране

```
double precision ld( 5 )
d = 0.
c = 0.5
n = 5
call aes5d( d, c, n, ld )
write(*,33) d, c, n, ld
33  FORMAT(2x,'d, c, n, ld', 2X, 2E12.4, I4,/5E12.4/)
stop
END
```

```
subroutine aes5d( d, c, n, ld )
с
с Вычисление собственных значений для
с симметричной якобиевой матрицы
с с одинаковыми диагональными элементами.
с
с Параметры программы:
с d - диагональный элемент
с c - внедиагональный элемент
с n - порядок матрицы
с ld(n) - одномерный массив собственных значений, расположенных в
с порядке возрастания
с
integer n, k
real d, c
double precision ld(n), pi, pin1
pi = datan(1.)*4.
pin1=pi/(n+1)
if(c.lt.0.) goto 2
do 1 k= 1 , n
ld(k) = d - 2*c*dcos(pin1*k)
1 continue
goto 4
2 do 3 k= n,1,-1
ld(n-k+1) = d - 2*c*dcos(pin1*k)
3 continue
```

```

4  return
   end

```

4. Программа вычисления собственных векторов на Фортране

```

double precision  vld(5,5)
n = 5
call aes6d( n, vld )
write(*,33)  n, vld
33  FORMAT(2x,' n, vld', 2X, I4,/(5E12.4/))
stop
END

```

```

subroutine aes6d( n, vld )

```

c

c Вычисление собственных векторов для
c симметричной якобиевой матрицы
c с одинаковыми диагональными элементами.

c

c Параметры программы:

c n - порядок матрицы

c vld(n,n) - двумерный массив собственных векторов, соответствующих

c собственным значениям, расположенным в порядке возрастания

c

```

integer j, k
double precision  vld( n,n ), a, fik, fik_j, a1, pi
pi = datan(1.)*4.
do 2 k=1, n
  vld(k,1)=1.
  fik = pi*k/(n + 1.)
  a1 = sin(fik)
do 1 j=2, n
  fik_j = fik*j
  a = sin(fik_j)
  vld(k,j) = (-1)**(j+1)*a/a1

```

```

1  continue

```

```

2  continue

```

```

return

```

```

end

```

Приложение 2. Тексты тестовых программ на языке Си

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double fdet ( float d, float c, int n );
int fau ( float d, float c, int n, double ua[] );
void fld ( float d, float c, int n, double ld[] );
void fv ( int n, double vld[] );

void main()
{
    int i, i1, j, j1, n = 5 ;
    float d = 2., c = 1., det;
    double ld[ 10 ], ua[100], vld[100];

    printf("\n      НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ  \n");
    printf("      d = %5.2f  c = %5.2f  n = %5d  \n", d, c, n );

    det = fdet ( d, c, n );
    printf("\n  Детерминант  \n" );
    printf("  det = %5.2f  ", det );

    fau ( d, c, n, ua );
    printf("\n  Обратная матрица  \n" );
    for ( i=0; i < n; i++)
    {
        for ( j=0; j < n; j++)
        {
            i1 = i + 1;
            j1 = j + 1;
            printf("ua(%1d,%1d)=%2.4f ", i1, j1, ua[j + i*n] );
        }
        printf("\n " );
    }

    fld (d, c, n, ld );
    printf("\n  Собственные значения  \n" );
    for ( i=0; i < n; i++)
    {
```

```

    i1 = i + 1;
    printf("  ld(%1d) = %2.2f  ", i1, ld[i] );
}

fv ( n, vld );
printf("\n  Собственные векторы  \n" );
for ( i=0; i < n; i++)
{
    for ( j=0; j < n; j++)
    {
        i1 = i + 1;
        j1 = j + 1;
        printf("  vld(%1d,%1d) = %5.2f  ", i1, j1, vld[j + i*n] );
    }
    printf("\n " );
}
} // end_of_main

double fdet ( float d, float c, int n )
//
// Вычисление определителя
// симметричной якобиевой матрицы
// с одинаковыми диагональными элементами.
//
// Параметры программы:
// d - диагональный элемент
// c - внедиагональный элемент
// n - порядок матрицы
// функция возвращает значение определителя
//
{
    int i;
    double det, eps = 1.e-10, fi, p, r, r1, r2, r3, s1, s2;
    if ( fabs (d*d - 4*c*c) <= eps ) // совпадающие корни
        // характеристического многочлена
    {
        for ( i=0, r = 1.; i < n; i++)
            r *= d/2.;
        det = r*( 1.+ n );
    }
}

```

```

    return det;
}
if ( d*d > 4*c*c) // различные вещественные корни
                // характеристического многочлена
{
    r1 = sqrt( d*d - 4.*c*c );
    r2 = ( d + r1 );
    r3 = ( d - r1 );
    for ( i=0, s1 = 1., s2 = 1., p = 1.; i < n + 1; i++)
    {
        s1 *= r2;
        s2 *= r3;
        p *= 2.;
    }
    det = ( s1 - s2 )/( p*r1);
    return det;
}
if ( d*d < 4*c*c) // мнимые корни
                // характеристического многочлена
for ( i=0, r = 1.; i < n; i++)
r *= c;
r1 = d/( 2 * c );
fi = acos( r1 );
det = r * sin( ( n + 1.)*fi)/sin(fi);
return det;
} // end_of fdet

int fau ( float d, float c, int n, double ua[] )
//
// Вычисление обратной матрицы для
// симметричной якобиевой матрицы
// с одинаковыми диагональными элементами.
//
// Параметры программы:
// d - диагональный элемент
// c - внедиагональный элемент
// n - порядок матрицы
// ua - массив элементов обратной матрицы
// Функция возвращает 1,если матрица вырождена и

```

```

// 0 в противном случае.
//
{
  int i, j, k, l ;
  double c1, c2, q1, q2, eps = 1.e-10, fi, r, r1, r2, r3, s1, s2, xjk;
  double sfi1, sfi2, sfi3;
  if ( fabs( d*d - 4*c*c ) <= eps ) // совпадающие корни
    // характеристического многочлена
  {
    q1 = -d/(2.*c);
    for ( j = 1 ; j < n + 1; j++ )
      for ( k = 1 ; k < n + 1; k++ )
        {
          if ( k + 1 >= j )
            {
              for ( l = 0, r = 1.; l < k - j + 1; l++ )
                r *= q1;
            }
          if ( k + 1 < j )
            {
              for ( l = 0, r = 1.; l < j - k - 1; l++ )
                r /= q1;
            }
          r1 = c*( j*q1*q1 - j + n + 1 );
          xjk = r/r1;
          if ( k < j )
            xjk *= ( j - n - 1 )*k;
          else
            xjk *= ( k - n - 1 )*j;
          ua[k-1+n*(j-1)] = xjk;
        }
    return 0;
  }
  if ( d*d > 4*c*c ) // различные вещественные корни
    // характеристического многочлена
  {
    r1 = sqrt( d*d - 4.*c*c );
    q1 = ( -d + r1 )/(2.*c);
    q2 = ( -d - r1 )/(2.*c);
  }
}

```

```

for ( l = 0, r1 = 1., r2 = 1.; l < n + 1 ; l++ )
{
    r1 *= q1;
    r2 *= q2;
}

c1 = -1./( c*( q1 - q2 ) * ( r1 - r2 ));

for ( j = 1 ; j < n + 1; j++ )
{
    for ( l = 0, r1 = 1., r2 = 1.; l < n + 1 - j ; l++ )
    {
        r1 *= q1;
        r2 *= q2;
    }
    c2 = c1*( r1 - r2 );

    for ( k = 1 ; k < n + 1; k++ )
    {
        for ( l = 0, r1 = 1., r2 = 1.; l < k ; l++ )
        {
            r1 *= q1;
            r2 *= q2;
        }
        xjk = c2*( r1 - r2 );
        ua[ k - 1 + n*(j - 1) ] = xjk;
        if ( k > j )
        {
            for ( l = 0, r1 = 1., r2 = 1.; l < k - j ; l++ )
            {
                r1 *= q1;
                r2 *= q2;
            }
            xjk += ( r1 - r2 )/( c * ( q1 - q2 ) );
            ua[ k - 1 + n*(j - 1) ] = xjk;
        }
    }
}

```

```

    return 0;
}

if ( d*d < 4*c*c )    // мнимые корни
                    // характеристического многочлена
{
    r1 = -d/ ( 2 * c );
    fi = acos( r1 );
    for ( j = 1 ; j < n + 1; j++ )
    {
        for ( k = 1 ; k < n + 1; k++ )
        {
            r1 = sin( fi );
            r2 = sin( (n + 1)*fi );
            r1 *= c*r2;
            if ( fabs(r1) <= eps ) return 1;
            r2 = sin(( n + 1 - j )*fi);
            r3 = sin( k*fi );
            xjk = -r2*r3/r1;
            if ( k > j )
            {
                r1 = sin( (k - j )*fi );
                r2 = c*sin( fi );
                if ( fabs(r2) <= eps ) return 1;
                xjk += r1/r2;
            }
            ua[k - 1 + n*(j - 1)] = xjk;
        }
    }
}
return 0;
}

void fld ( float d, float c, int n, double ld[] )
//
// Вычисление собственных значений для
// симметричной якобиевой матрицы
// с одинаковыми диагональными элементами.
//

```



```

// Параметры программы:
// d - диагональный элемент
// c - внедиагональный элемент
// n - порядок матрицы
// ld - массив собственных значений
//
{
    int i;
    float k ;
    double a, pi, pin1;
    pi = atan(1.)*4.;
    pin1=pi/(n+1);
    if(c>0.)
    {
        for ( k=1; k <= n; k++)
        {
            ld[k-1] = d - 2*c*cos(pin1*k);
        } return;
    }
    for ( k=n; k >= 1; k--)
    {
        ld[n-k] = d - 2*c*cos(pin1*k);
    }return;
}

void fv ( int n, double vld[] )
//
// Вычисление собственных векторов
// симметричной якобиевой матрицы
// с одинаковыми диагональными элементами.
//
// Параметры программы:
// n - порядок матрицы
// vld - массив собственных векторов
//
{
    int j, k;
    double a, fik, fik_j, a1, pi;
    {

```

```

pi = atan(1.)*4.;
for(k=1; k<=n; k++)
{
  vld[(k-1)*n+0]=1.;
  fik = pi*k/(n + 1.);
  a1 = sin(fik);
  for(j=2; j<=n; j++)
  {
    fik_j = fik*j;
    a = sin(fik_j);
    vld[(k-1)*n+(j-1)] = pow(-1,j+1)*a/a1;
  }
}
}

```